

关于牛顿摆的运动及其形成条件的动力学模拟

10317107 陈箬泽

东南大学物理学院

2019年5月20日

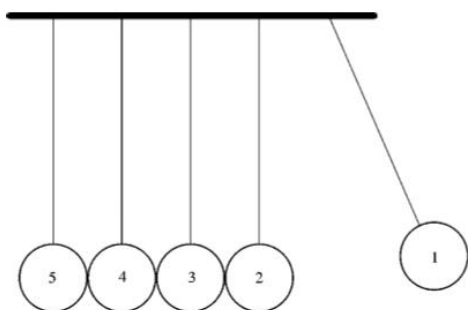
摘要 本选题来自2019年IYPT(国际青年物理学家竞赛)赛题的第15题。作者使用动力学模拟的方法,关于牛顿摆的行为进行研究。得到了较为详细的牛顿摆的运动状态。并且进一步研究得到了牛顿摆的形成条件与摆球材料之间的关系。

关键词 牛顿摆 动力学模拟

1. 研究背景

牛顿摆是一个19世纪60年代发明的桌面演示装置,五个质量相同的球体由吊绳固定,彼此紧密排列。当拉起最左边一个摆球并放下后,经过球与球之间的撞击,最右边的摆球会摆起。最右边的球落下后,又会经过撞击使最左边的球开始摆动。如此循环。

在人们的印象中,牛顿摆始终存在于一个理想情况下。即只有两端的摆球会发生运动,而中间的摆球丝毫不动。而在实验中,我们很容易观察到中间的摆球的运动,还有牛顿摆会因为能量损失而逐渐停止的现象。



图表1: 一个由5个球构成的牛顿摆

2. 问题分析

对于任意一个小球,考虑单摆模型,即它偏离平衡位置时,会受到恢复力 $F_1 = g/l * \Delta x$ 。

考虑相邻的两个小球,它们具有相同的质量 m 和半径 r ,当它们发生撞击时,存在重叠的长度 ξ 。两球之间的作用力 $F_2 = k * \xi^\alpha$ 。 k 是弹力系数, α 可以取1.5。根据赫兹接触公式, k 则与摆球材料的杨氏模量、泊松比等物理量有关。 k 可以写成如下形式

$k = \frac{\sqrt{2RE}}{3(1-\nu^2)}$ 。其中, E 是材料的杨氏模量, ν

是材料的泊松比。我们可以定性地看出,在小球直径一定去情况下,弹性系数与杨氏模量成正比,同时,泊松比越大

除此之外,我们还需要考虑系统能量的损耗。系统能量的损耗有两种途径,一种是空气阻力,另外一种是在碰撞时产生的能量损耗,碰撞产生的能量损耗与重叠长度 ξ 有关。关于空气阻力,我们选择阻力大小和速度成线性相关。

所以,考虑小球受的三种力,小球总的动力学方程可写为

$$m\ddot{x} = k\xi_{left}^\alpha - k\xi_{right}^\alpha + \frac{g}{l}(x_0 - x) - \eta v$$

在接下来的工作中,我们就使用上述关系对牛顿摆建模。

3. 物理模型的建立

3.1 模型假设

考虑牛顿摆摆球的数量 $n=5$,摆长 $l=1$,本地重力加速度 $g=9.8$,小球半径0.05米。

在与题目情景相似的物理条件下,假设温度为 20°C ,小球速率1米/秒。经计算得到,空气阻力仅为 $3.4 \times 10^{-5}\text{N}$ 。因为在牛顿摆中,摆球摆起的角度不会超过 90° ,所以摆球的速度不可能很大。即当摆球的密度取常见固体材料的密度值时,空气阻力与其它力相比太小,可以忽略。因此,我们可以得到结论:空气阻力不是系统动能减小的主要原因。

所以,在之后的可以步骤中,一般情况下,我们将不再考虑空气阻力的影响。

3.2 参数的确定

接下来,我们需要估计弹性系数 k 的大小。通过查表我们可知,常见金属材料的杨氏模量大小的数量级大概在 10^{11}N/m^2 量级。在乘以与摆球半径有关的因子 $\sqrt{2R}$ 后, k 的数量级可以被确定在 $10^{11}\text{N/m}^{1.5}$ 。

对于常见材料, k 的数量级过于巨大,在这个巨大数量级之下,由于算法不够精确,程序运行的结果很不好。

所以我们选择在较低的数量级下运行这个程序,定性地观察 k 取值的大小与牛顿摆运动状态的关系,并且将这个关系推广到更高的数量级之上。

4. 编程实现

4.1 建立摆球类

建立一个摆球结构体,将摆球的各项参数作为摆球类的成员变量。结构体的成员变量包括摆球的半径 r 、平衡位置 x_0 、球心的位置 x 、球心的速度 v 。

4.2 摆球位置的初始化

这一步的目的在于将摆球以 $2r$ 的间距,等密度地排放在一个一维空间内。同时设定每个摆球的初始位置,使在其后的操作中,摆球受一个和其偏离初始位置的长度成正比的一个恢复力。

4.3 动力学模拟函数

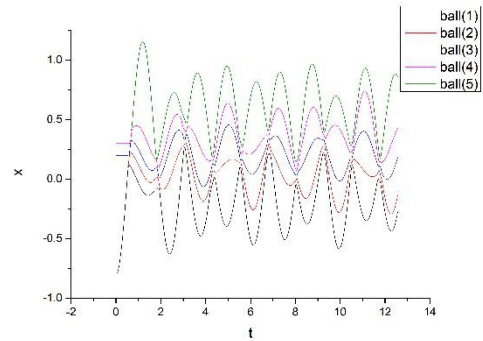
在此程序中,我们假设初始能量不为零的摆球只有一个,同时摆球的初始速度为零而初始位置不是初始需要。此初始设定已经可以满足此动力学模拟的需要。由于这个程序的可扩展性较强,所以当有相关需要时,只需要做简单的修改就可以实现改变初始球数量、改变初始位置和速度等需求。

这个函数的输入端需要输入三个参数,分别是所需要进行模拟的一个摆球类数组 b 、这个数组中包含的摆球数量 n 、和第一个球的初始位置。

在这个程序中,我们用二阶龙格库塔方法对系统进行动力学模拟。由于碰撞弹力项的形式较为复杂,所以在第二阶中,我们只考虑摆球偏离平衡位置的恢复力的贡献。同时,在程序中,我们也不考虑摆球碰撞时能量的损失。

5. 结果与讨论

5.1 当 k 值较小时的结果



图表 2 在程序中取 $k=2000$ 的结果

图表 2 描述了当材料的弹性模量较小 ($k=2000$) 时,动力学模拟所得到的结果。可以看出,在这种情况下,在一个较短的时间范围内,摆球的运动十分杂乱无章。

我们可以试着去分析摆球运动的这种混乱性。注意到,当摆球 1 至摆球 4 第一次被撞击后,运动状态存在着一定的有序性。即四个摆球振动的频率和幅度都大体相同,只有相位存在较大差异。而在之后的运动中,相位的差异由于后续的撞击而产生更大的差异。而后续更大的差异,不仅包括相位上的差异,还包括幅度上的差异。

如果我们不加任何阻力,任由这个系统演化下去,我们也许可以观察到这个系统是一个混沌系统。

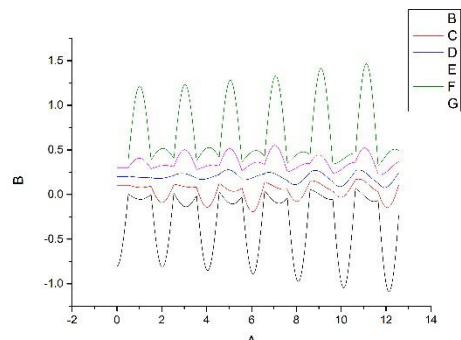
同时,我们可以产生这样一个猜想:若摆球的杨氏模量增大使 k 增大,那么前四个小球在第一次撞击之后的相位差就好减小,从而提高牛顿摆系统的稳定性。

5.2 当 k 值较大时的结果

图表 3 (见下页) 描述了当材料的弹性模量较大 ($k=500000$) 时,动力学模拟所得到的结果。

可以看到,相比与 $k=2000$ 时,在这种情况下,边上两个球的振动幅度已经稳定,而中间三个球的运动存在的相位差已经很小,并且随时间的增加,完成碰撞后的小球更倾向以一个固定的运动模式进行运动。图中随时间增加,边缘小球运动的幅度开始增

大。算法的不精确导致的误差开始显现。



图表 3 在程序中取 $k=6000000$ 的结果

5.3 结果分析

从以上结果可以看出，如果想要一个牛顿摆正常工作，那么我们在制造摆球时需要使用弹性模量较大的材料。

如果使用的材料的弹性模量不够大，那么振动的传播速度就会很慢，造成不同摆球运动的相位差，从而使运动变得混乱，增大能量的损耗。

在上述结果中，我们还可以看到，中间的球并不是完全不动。在牛顿摆中，不是所有能量都传递给了两边的球，中间是摆球也具有一定的能量。

而在实际生活中，我们所看到的牛顿摆的摆球多是由较硬的实心金属球制成，而不会由塑料或者橡胶制成。这也与我们通过上述计算得到的结果相符。

参考文献

[1] Hutzler, Stefan, et al. "Rocking Newton's cradle." *American Journal of Physics* 72.12 (2004): 1508-1516.

[2] 梁昆淼. 数学物理方法[M]. 高等教育出版社:北京, 2010:111-