

# 浅谈三体问题

甘庆雨

(东南大学物理系, 南京, 21189)

**摘要:** 本文运用 Verlet 算法<sup>[1]</sup>的数值计算方法模拟了目前仍无法解析求解的三体系统, 包括经典三体系统和限制性三体系统, 其中模拟的日月地系统与实际情况符合得很好, 同时也模拟了 3 种运动状态稳定的三体系统。本文还通过对数值计算所得出数据的定性分析, 探讨了算法精度对结果的原则上不可除去的影响与系统中的质点所具有的大幅度振荡特性, 得出了三体系统是混沌系统的结论。

**关键词:** 三体问题, 精度, 稳定态, 混沌

三体问题是指三个质量、初始位置和初始速度都是任意的可视为质点的天体, 在相互之间万有引力的作用下的运动规律问题。三体问题是希尔伯特于 1900 年提出的 N 体问题的特例。在一般三体问题中, 每一个天体在其他两个天体的万有引力作用下的运动方程都可以表示成 3 个二阶的常微分方程, 或 6 个一阶的常微分方程。因此, 一般三体问题的运动方程为十八阶方程, 必须得到 18 个积分才能得到完全解。虽然从理论上可以证明三体问题属于决定论问题, 但要想得到通解表达式, 通过降维的方法意味着我们需要 18 个不变量条件, 然而目前只有 10 个 (质心方程 3 个, 动量守恒方程 3 个, 角动量守恒方程 3 个, 能量守恒方程 1 个), 所以说在解析上还远远解决不了三体问题。<sup>[2]</sup>但我们可以从计算机模拟和数值计算的方法来得到一些启示性的和重要的结论。

## 1 原理与算法

### 1.1 原理

此文中只考虑二维平面的三体问题, 设质量分别为 $m_a, m_b, m_c$ 的三个圆球 (当做质点, 标号为 $a, b, c$ ) 处于平面 $\pi$ 上, 它们的位矢分别  $r_a, r_b, r_c$ , 速度分别为 $v_a, v_b, v_c$ , 它们之间的万有引力分别为 $F_{ab}, F_{bc}, F_{ca}, F_{ba}, F_{cb}, F_{ac}$  (注意 $F_{ab}$ 指质点 $a$ 受到质点 $b$ 的力, 以此类推)。示意图如图 1 所示

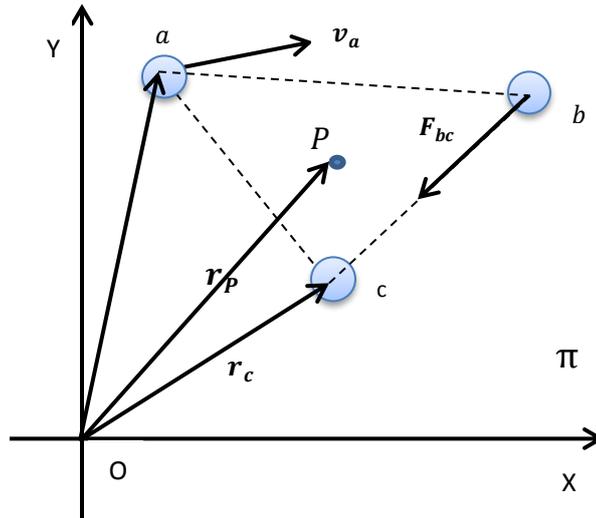


图1, 三体问题示意图

图中P,  $\mathbf{r}_P$ 代表该系统的质心与质心位矢, 相应的 $m_P$ ,  $\mathbf{v}_P$ 表示质心的质量与速度。由牛顿万有引力定律和第二定律有如下关系:

$$\begin{aligned}
 m_a \ddot{\mathbf{r}}_a &= \mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{ac} = G \frac{m_a m_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|^3} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) + G \frac{m_a m_c}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a|^3} (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a) \\
 m_b \ddot{\mathbf{r}}_b &= \mathbf{F}_{ba} + \mathbf{F}_{bc} = G \frac{m_b m_a}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) + G \frac{m_b m_c}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b|^3} (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b) \\
 m_c \ddot{\mathbf{r}}_c &= \mathbf{F}_{ca} + \mathbf{F}_{cb} = G \frac{m_c m_a}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_c|^3} (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_c) + G \frac{m_c m_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_c|^3} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_c)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

式中 $\ddot{\mathbf{r}}_a$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}_b$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}_c$ 分别代表a,b,c的加速度, G为万有引力常数。

## 1.2 Verlet 算法

为使编程的方便, 引入直角坐标系与正交单位向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 。则a,b,c三质点的坐标分别为 $(x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c)$ , 速度在坐标系下分解表示为 $(vx_a, vy_a), (vx_b, vy_b), (vx_c, vy_c)$ , 易得以下关系:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a &= (x_b - x_a, y_b - y_a) \\
 \mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b &= (x_c - x_b, y_c - y_b) \\
 \mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a &= (x_c - x_a, y_c - y_a)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

同样力也可在坐标系下分解:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{ab} &= G \frac{m_a m_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|^3} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) \mathbf{i} + G \frac{m_a m_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|^3} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) \mathbf{j} \\
 \mathbf{F}_{bc} &= G \frac{m_b m_c}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b|^3} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b) \mathbf{i} + G \frac{m_b m_c}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b|^3} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b) \mathbf{j} \\
 \mathbf{F}_{ca} &= G \frac{m_c m_a}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a|^3} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a) \mathbf{i} + G \frac{m_c m_a}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a|^3} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a) \mathbf{j}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

将式(2)(3)代入式(1)中整理并取 $G = 1$ 有:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_a &= \frac{m_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|^3} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) + \frac{m_c}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a|^3} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a) \\
\ddot{y}_a &= \frac{m_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|^3} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) + \frac{m_c}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a|^3} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a) \\
\ddot{x}_b &= \frac{m_a}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) + \frac{m_c}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b|^3} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b) \\
\ddot{y}_b &= \frac{m_a}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) + \frac{m_c}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b|^3} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b) \\
\ddot{x}_c &= \frac{m_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_c|^3} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_c) + \frac{m_a}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_c|^3} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_c) \\
\ddot{y}_c &= \frac{m_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_c|^3} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_c) + \frac{m_a}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_c|^3} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_c)
\end{aligned}
\tag{4}$$

$\ddot{x}_a$  表示  $x_a$  对时间  $t$  求两阶导数，以此类推。

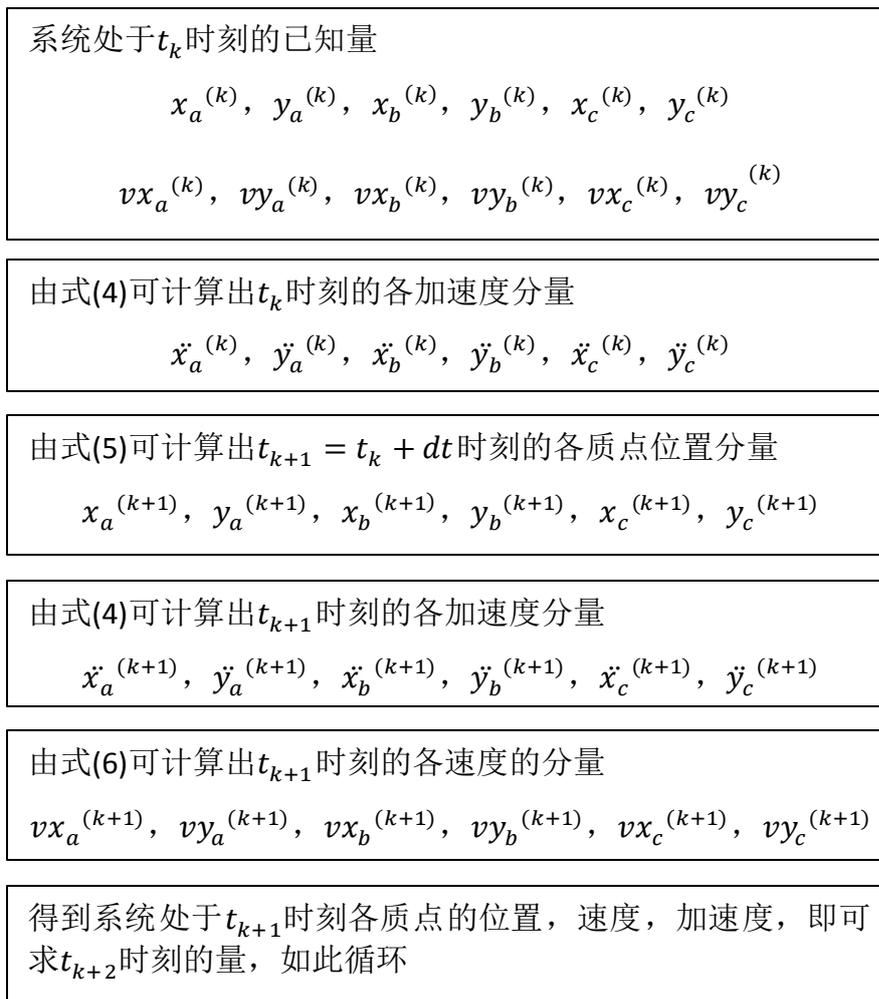
给定某时刻  $t_k$  的各质点的位置与速度，利用 Verlet algorithm 和以上公式就可以求得下一时刻  $t_{k+1} = t_k + dt$  ( $dt$  为间隔时间) 各质点的位置与速度，递推关系如下：

$$\begin{aligned}
x_a^{(k+1)} &= x_a^{(k)} + dt * vx_a^{(k)} + \frac{dt * dt}{2} * \ddot{x}_a^{(k)} \\
y_a^{(k+1)} &= y_a^{(k)} + dt * vy_a^{(k)} + \frac{dt * dt}{2} * \ddot{y}_a^{(k)} \\
x_b^{(k+1)} &= x_b^{(k)} + dt * vx_b^{(k)} + \frac{dt * dt}{2} * \ddot{x}_b^{(k)} \\
y_b^{(k+1)} &= y_b^{(k)} + dt * vy_b^{(k)} + \frac{dt * dt}{2} * \ddot{y}_b^{(k)} \\
x_c^{(k+1)} &= x_c^{(k)} + dt * vx_c^{(k)} + \frac{dt * dt}{2} * \ddot{x}_c^{(k)} \\
y_c^{(k+1)} &= y_c^{(k)} + dt * vy_c^{(k)} + \frac{dt * dt}{2} * \ddot{y}_c^{(k)}
\end{aligned}
\tag{5}$$

和

$$\begin{aligned}
vx_a^{(k+1)} &= vx_a^{(k)} + \frac{dt}{2} * (\ddot{x}_a^{(k)} + \ddot{x}_a^{(k+1)}) \\
vy_a^{(k+1)} &= vy_a^{(k)} + \frac{dt}{2} * (\ddot{y}_a^{(k)} + \ddot{y}_a^{(k+1)}) \\
vx_b^{(k+1)} &= vx_b^{(k)} + \frac{dt}{2} * (\ddot{x}_b^{(k)} + \ddot{x}_b^{(k+1)}) \\
vy_b^{(k+1)} &= vy_b^{(k)} + \frac{dt}{2} * (\ddot{y}_b^{(k)} + \ddot{y}_b^{(k+1)}) \\
vx_c^{(k+1)} &= vx_c^{(k)} + \frac{dt}{2} * (\ddot{x}_c^{(k)} + \ddot{x}_c^{(k+1)}) \\
vy_c^{(k+1)} &= vy_c^{(k)} + \frac{dt}{2} * (\ddot{y}_c^{(k)} + \ddot{y}_c^{(k+1)})
\end{aligned}
\tag{6}$$

式中由上标 $k$ 表示 $t_k$ 时刻该量的数值，并且令 $k = 0$ 表示初始时刻。综上可归纳成运算流程图如下：



### 1.3 对初始时刻状态的限制

系统没有受到外力，系统的总能量 $E$ 守恒并且只包括质点的总动能 $E_k$ 与质点之间的引力势能 $E_p$ ，即：

$$E = E_k + E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2}m_a v_a^2 + \frac{1}{2}m_b v_b^2 + \frac{1}{2}m_c v_c^2$$

$$E_p = -\frac{m_a m_b}{|r_a - r_b|} - \frac{m_b m_c}{|r_b - r_c|} - \frac{m_c m_a}{|r_c - r_a|}$$

.....(7)

式中已取 $G = 1$ 和无穷远处势能为零。由于 $E > 0$ ，将式(7)简单整理并且取初始时刻的量即可得约束条件。值得注意的是，三体问题的束缚态并不意味着任何时刻质点与质点间的距离是有限的，可以存在一个质点逃离到无限远而另外两个质点由于动能小于势能而相撞的情形，但绝不会出现三个质点间的距离都是无限的情形。另外这只是理论上的要求，在接下来的探讨中将会看到这对数值分析处理三

体问题并不起作用。

同样的系统质心的动量守恒，在处理问题时尽量把初始时刻的质心动量  $v_p^{(0)}$  取为零。

## 2 模型算法的应用

### 2.1 模拟日月地系统的轨迹

太阳，地球，月球的运动是典型的三体运动。查资料可得太阳质量约为  $2.0 \times 10^{30} \text{kg}$ ，地球质量约为  $6.0 \times 10^{24} \text{kg}$ ，月球质量约为  $7.4 \times 10^{22} \text{kg}$ ，初始时刻取太阳为坐标原点，地球处于近日点并且地球在日月地连线之间，相应的数据为地球距离太阳为  $1.47 \times 10^{11} \text{m}$ ，速率为  $30.3 \times 10^3 \text{m/s}$ ，月球距太阳  $1.4736 \times 10^{11} \text{m}$ ，速率为  $29.17 \times 10^3 \text{m/s}$ 。令模型中的  $a, b, c$  分别代表太阳，地球，月球，由于模型中是自然单位制，经换算得  $m_a = 1.33 \times 10^{20}, m_b = 4.0 \times 10^{14}, m_c = 5.0 \times 10^{12}$ ，初始时刻各量如下：

$$\begin{aligned} x_a^{(0)} &= 0, y_a^{(0)} = 0, x_b^{(0)} = 1.47 \times 10^{11}, y_b^{(0)} = 0, x_c^{(0)} = 1.4736 \times 10^{11}, y_c^{(0)} = 0 \\ vx_a^{(0)} &= 0, vy_a^{(0)} = 0, vx_b^{(0)} = 0, vy_b^{(0)} = 30.3 \times 10^3, vx_c^{(0)} = 0, vy_c^{(0)} = 29.17 \times 10^3 \end{aligned}$$

结果如下：

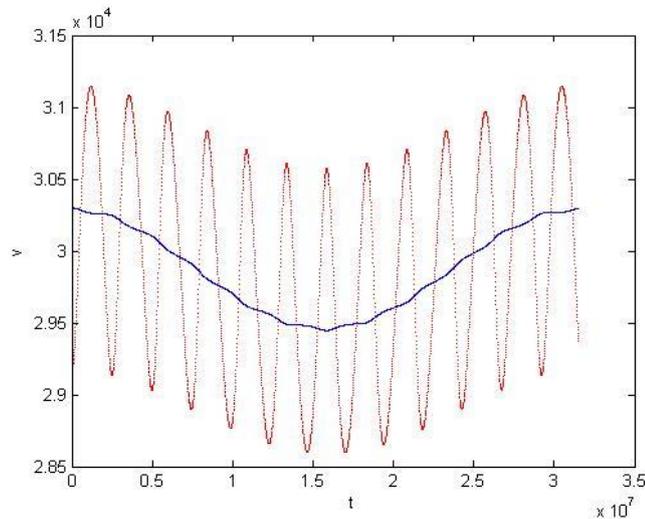


图 2 月球(红)与地球(蓝)一年中的速率时间图

从图 2 中可以看出，地球在远日点的速度大约为  $29.4 \times 10^3 \text{m/s}$ ，与实际结果很接近。考虑到在太阳系中的恒星月周期为 27.32 天(非地球系中的 29.54 天)，一年大约有 13 个周期，核实图中的红线的峰(谷)也约为 13 个。另外月球绕地球的速率约为  $1.0 \times 10^3 \text{m/s}$ ，这些都说明拟合的结果与实际情况符合。

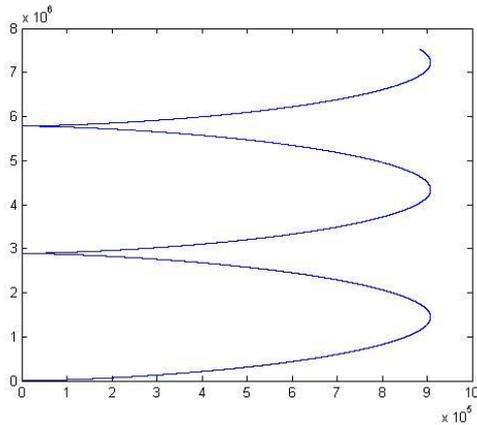


图3 太阳在两年半内的运动轨迹

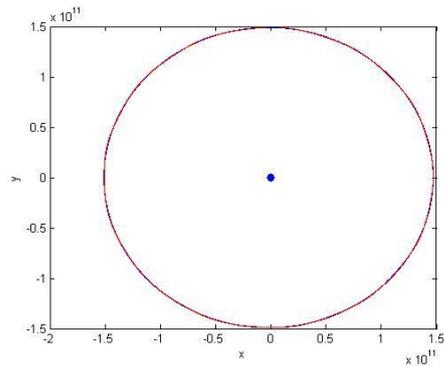


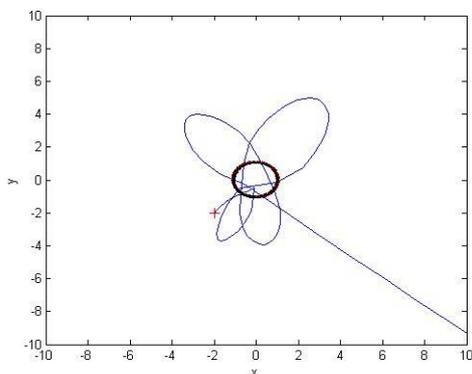
图4 日月地系统的轨迹

由于初始时刻速度的设定使得该系统质心有一个沿  $y$  方向的动量，由动量守恒可知随着时间的推移，太阳也会沿着  $y$  方向移动，但在  $x$  方向不会，图3反映出的结果合理。只不过由于系统的质量几乎都由太阳提供并且日地距离（约为  $10^{11}$  的数量级）远远大于太阳位移（约为  $10^5$  的数量级），所以在图四中看不出太阳的位移。另外月地距离相对日地距离小得多，所以两者在图4中的大圆轨迹中区分不开。

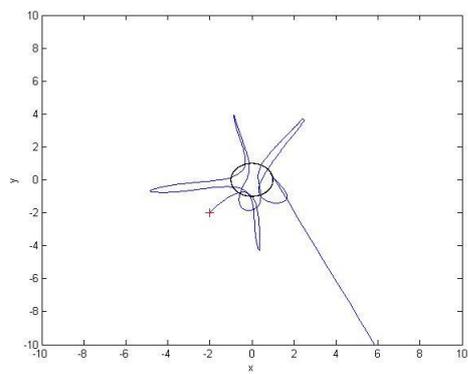
## 2.2 数值计算的精度问题

分析数值计算的精度问题对数值处理三体问题有着很重要的意义。该问题主要体现在 Verlet algorithm 中时间间隔  $dt$  的大小上。 $dt$  过大，计算的数据不够精确， $dt$  过小，要得到一定规模的轨迹长所需的运行步数就增多，增加了程序运行的困难，所以取合适大小的  $dt$  就十分重要。在求解日地月系统的时候，由于空间周期与时间周期的大尺度， $dt$  取 1000s 或 10000s 都可得到理想的结果。从下面这个例子可以得到启发性的结论。

考虑一个限制性三体模型（即一个质点质量远远小于另外两个质点的质量）。取  $m_a = 1, m_b = 10000, m_c = 10000$ ，初始时刻的量如下：  
 $x_a^{(0)} = -2, y_a^{(0)} = -2, x_b^{(0)} = -1, y_b^{(0)} = 0, x_c^{(0)} = 1, y_c^{(0)} = 0$   
 $vx_a^{(0)} = 0.2, vy_a^{(0)} = 0, vx_b^{(0)} = 0, vy_b^{(0)} = 50, vx_c^{(0)} = 0, vy_c^{(0)} = -50$   
 结果如下：



a  $dt=0.01$



b  $dt=0.001$

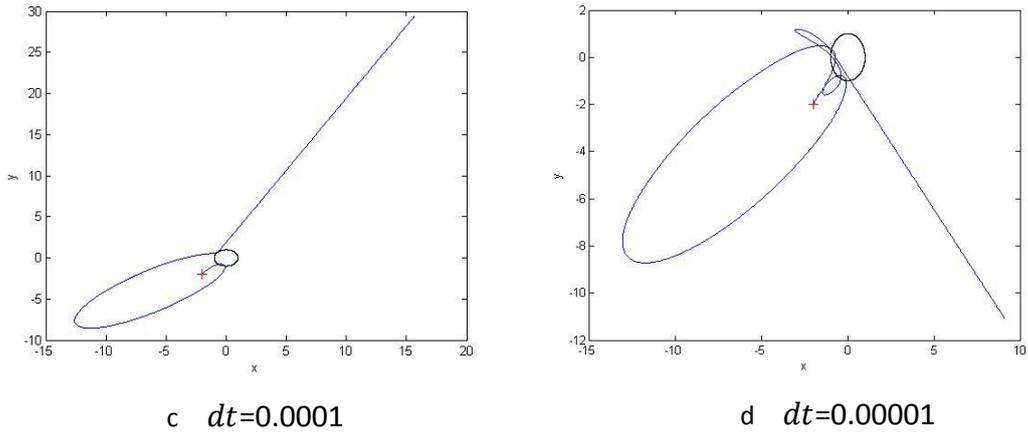


图 5 不同 $dt$ 情形下的轨迹

图 5 中的黑色粗圆圈即为  $b, c$  两个大质量质点的轨迹（初始时刻速度的特性选取使得它们类似于双星系统），而蓝细线即为小质量质点  $a$  的运动轨迹，图中的红点为初始位置。可以看出不同的  $dt$  对  $a$  的轨迹的影响，尤其是随着时间的向后推移影响的是不断放大的。如果要准确预测一定时间范围内的  $a$  的运动轨迹，则可以取合适大小的  $dt$  以达到目的。但若想准确预测长时间以后的  $a$  的运动轨迹，则需要不断的减小  $dt$  的大小。换句话说，就是无论  $dt$  多么小，都无法精确计算出任意时刻的  $a$  的位置，这就说明三体系统是一个混沌系统。这看似三体问题是一个随机论问题而非决定论问题，事实上决定论与随机论的区别在于系统当前时刻的状态是否能决定系统下一临近时刻的状态，而非是否能决定系统无穷远时间以后的状态。

从下面这个简单的例子可以看到混沌效应对初始量的极度依赖。考虑一个模型，它的原型是目前已经探测到的 WR 20a 双星系统：每颗恒星的质量约为太阳质量的 80 多倍，这两颗超重恒星围绕共同重心在快速旋转，它们旋转一周为 3.7 天。<sup>[3]</sup> 假设处于质心位置有一单位自然质量的小星球，在初始时刻受到扰动具有了初速度，一种情形是初速度沿  $x$  轴正向，一种情形是初速度沿  $x$  轴负向，大小都为  $1\text{m/s}$ ，六个小时后的结果如图 6 所示：

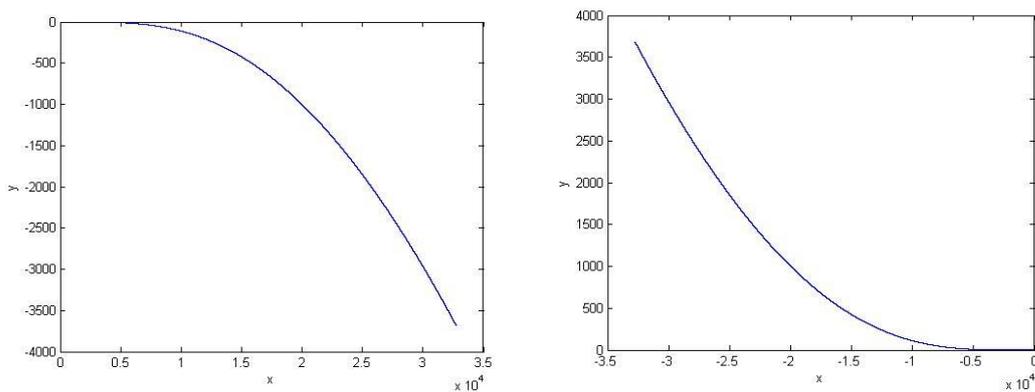


图 6 六小时后小星球在不同的扰动下的轨迹

可以看到如此下的扰动使得它们之间的差别在仅仅 6 小时后就差了  $10^4$  数量级。当然这是在没考虑双星系统中的引力波情形下，可见实际情况要复杂得多。

## 2.3 稳定态

一般情形下的三体运动轨迹是混乱且不可长期预言的，换句话说这样混沌的质点会出现在束缚态限制区域中的任一点的附近位置，表现出一种无序性与非周期性，所以要想得到稳定的三体运动状态，就要从周期性的模式着手。对于二体问题，其轨道就是以它们的质心为焦点的圆锥曲线，这样限制性三体问题一般就可以找到稳定的运动状态。最常见限制性三体系统的就是日月地系统，其中把月球当成小天体。我们更关心的不是这类系统，而是当三个质量差不多的具有稳定态的三体系统。下面就列出了几种稳定系统。

A 三质点在一直线上，两质点围绕一质点转

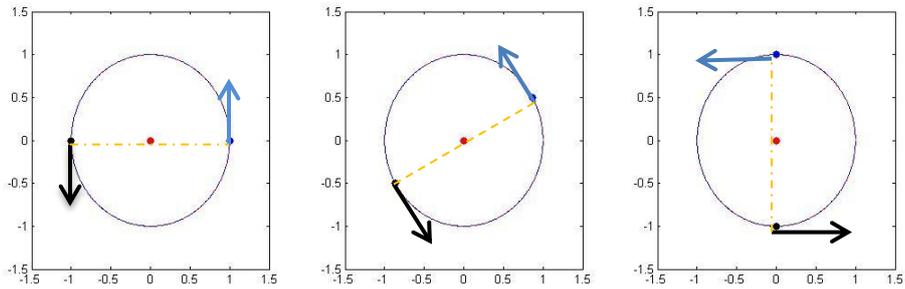


图7 稳定状态 A 类

B 三质点在一圆周上

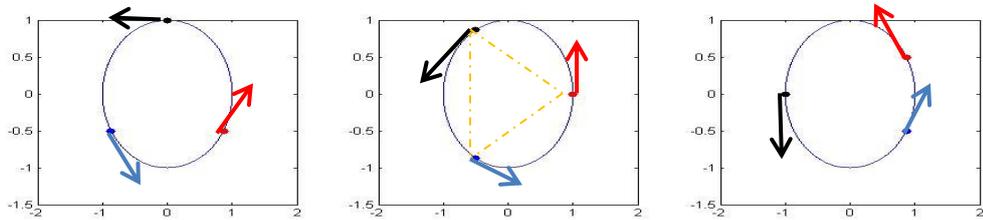


图8 稳定状态 B 类

C 三质点在“8”字形上<sup>[4]</sup>

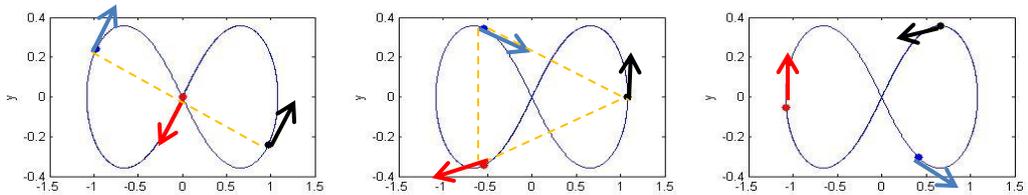


图9 稳定状态 C 类

简单的计算即可得 A 和 B 模型，C 模型从文献中可取初始量如下得到：

$$\begin{aligned}
 & m_a = 1, m_b = 1, m_c = 1 \\
 & x_a^{(0)} = 0.97, y_a^{(0)} = -0.24309, x_b^{(0)} = -0.97, y_b^{(0)} = 0.24309, x_c^{(0)} = 0, y_c^{(0)} = 0 \\
 & vx_a^{(0)} = 0.4662, vy_a^{(0)} = 0.4324, vx_b^{(0)} = 0.4662, vy_b^{(0)} = 0.4324, vx_c^{(0)} = \\
 & -0.9324, vy_c^{(0)} = -0.8647
 \end{aligned}$$

这里只列出了 3 种类型，到目前为止已经找到了 16 种类型的三体运动稳定态，并且仍然没有理论得出稳定态的种类数是否有限的结论。

## 2.4 大幅度的振荡

尽管三体模型只能得到一定时间范围内的较准确数值解,但这已经足够定性的分析系统的一些典型特征,其中就包括大幅度的振荡。只要在非稳定的态下,无论是限制性三体问题还是经典三体问题这种情况都一定会发生。这样的特性在随意设定初始状态(除去极其特殊的情况)时都会体现在结果上,这里取两个例子。一个是限制性三体模型,各量如下:

$$m_a = 1, m_b = 10000, m_c = 10000$$

$$x_a^{(0)} = 0.2, y_a^{(0)} = 0, x_b^{(0)} = -1, y_b^{(0)} = 0, x_c^{(0)} = 1, y_c^{(0)} = 0$$

$$vx_a^{(0)} = 4, vy_a^{(0)} = 4, vx_b^{(0)} = 0, vy_b^{(0)} = 50, vx_c^{(0)} = 0, vy_c^{(0)} = -50$$

得结果如图 10(a)。

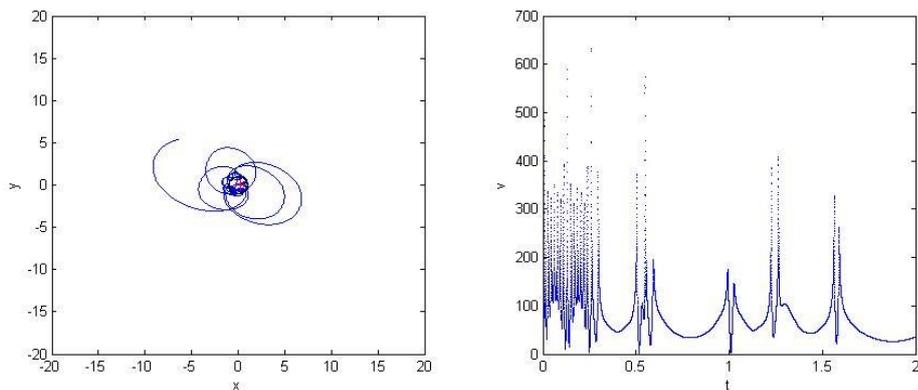
另一个是经典三体模型,各量如下:

$$m_a = 1, m_b = 1, m_c = 1$$

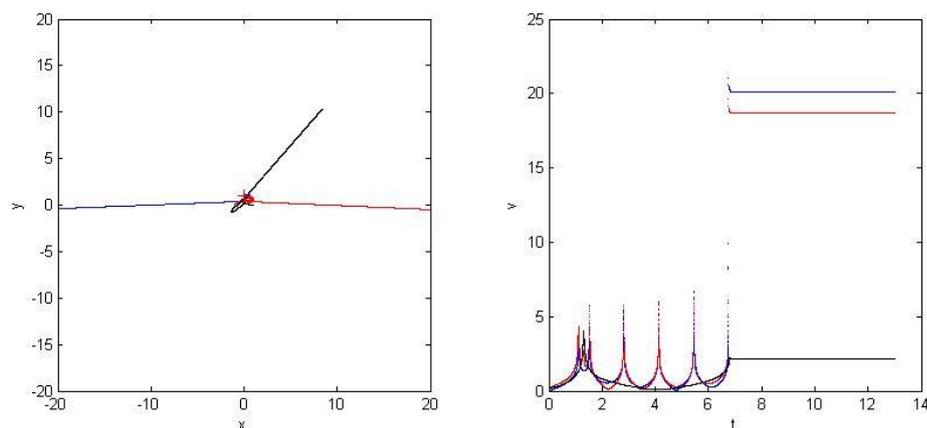
$$x_a^{(0)} = 0, y_a^{(0)} = 1, x_b^{(0)} = -1, y_b^{(0)} = 0, x_c^{(0)} = 1, y_c^{(0)} = 0$$

$$vx_a^{(0)} = 0, vy_a^{(0)} = 0, vx_b^{(0)} = 0.1, vy_b^{(0)} = 0.2, vx_c^{(0)} = -0.1, vy_c^{(0)} = -0.2$$

得结果如图 10(b)。



(a) 左图为轨迹图,右图为a的速度—时间图



(b) 左图为轨迹图,右图为a,b,c的速度—时间图

图 10 短时间内的各模型下的轨迹与速度图

例中计算的是较短的时间内运动的状态,这让实验数据有充分的可信度。从图中可以看出,质点有位置分布无序性与速度大幅度振荡的特性。图 10(b)中的

右图在时间大约在 7 秒以后，速度就几乎没有了变化，这似乎有悖常理，但实际情况是由于质点间的快速背离使得距离急剧增大，万有引力迅速减少，质点所受的加速度大小减小到几乎趋于零。真实情况速率确实会减小，只是由于单位时间内的减小值超出了计算机的精度范围，所以从图中看就是三条水平线。从两个模型的初始初始状态可知它们都处于束缚态内，但从实验的结果看这一点并不显然甚至可能是误导的，这也就说明束缚态的与否从数值计算的结果中并不能做出正确地判断。

细看图 10(a)的时间与速度关系图，质点速率密集而且剧烈的振荡让人会提出一个看似可笑却值得深思的问题：可不可能在某个有限的时间点上，速率的峰值是无穷大的？该命题等价于：质点间的距离可不可能在有限的时间内趋于无穷大。这正是著名的庞勒维猜想。庞勒维证明了在三体系统中这种情形不会发生，并猜想在  $N(N>3)$  体系统中是可能发生的，最终这个猜想被一位年轻的中国数学家夏志宏通过构造出符合要求的 5 体系统而得到证实。<sup>[5]</sup>

### 3 结论

本文运用 Verlet 算法对三体模型进行数值计算与轨迹模拟，得出了一些常见的和不常见的结论。由于三体系统的混沌效应从原则上说明了数值计算的局限性，所以要想真正解决三体问题，必须依靠于解析方法。但是三体问题的复杂性远远超出目前的解析数学处理水平，而三体问题又仅仅是  $N$  体问题的一个特例，所以  $N$  体问题的棘手程度就不言而喻了。值得注意的是， $N$  体问题仅仅是牛顿经典力学体系下的问题，与广义相对论是不相容的，所以从这个层面上来看  $N$  体问题与其说是一个物理问题，不如说是一个数学问题。无论如何，彻底解决这个问题都必将是科学领域的一个巨大的成功与飞跃。

### 参考文献：

- [1] Tao Pang. An Introduction to Computational Physics[M]: cambridge university press, 2006, 232 页~240 页.
- [2] Y.Hagihara. Celestial Mechanics[M]:Vol.I,MIT Press, Cambridge, 1970.
- [3]<http://zhidao.baidu.com/link?url=5KzxsxTACfB-kF9VNDnlbWHK-cJ7fTFKOJLiPN7N2q9ZUhn4vFz-VD3Sb7r0iySXjdpxPA2r5y9nHbUw9LQD6a>; 2014 年 12 月 14 日引自百度知道.
- [4] Alain Chenciner and Richard Montgomery. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses:[J], Annals of Mathematics, 152 (2000), 881–901.
- [5] 弗洛林·迪亚库. 天遇：混沌与稳定性的起源[M].上海：上海世纪出版集团，2005 年 4 月 1 日.